Кинематика вращательного движения материальной точки.

Траектория движения – окружность. На рисунке к задаче необходимо четко показать положение центра окружности и ее радиус. Положение точки на окружности можно задавать углом поворота φ - углом между радиус-вектором $\vec{r}$ точки и осью x. Радиус-вектор проводится от оси вращения (центра окружности) к материальной точке.

При движении точки изменяется и угол φ. Угловая скорость ω равна отношению угла поворота $\Delta\varphi$ радиуса-вектора точки к промежутку времени Δt, за который этот поворот совершен

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

При равномерном вращении

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T - период вращения (время одного полного оборота).

Линейная скорость точки (скорость вдоль траектории), движущейся по окружности радиуса r, определяется выражением: $v = \omega r$. Для равномерного вращения $v = 2\pi r / T$.

При движении по окружности полное ускорение $\vec{a}$ точки есть векторная сумма нормального (или центростремительного) ускорения $\vec{a}_n$ и тангенциального (или касательного) ускорения $\vec{a}_\tau$: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

Вектор $\vec{a}_n$ перпендикулярен вектору мгновенной скорости $\vec{v}$ и <u>направлен к центру окружности.</u> Модуль вектора $\vec{a}_n$ определяется выражением

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v.$$

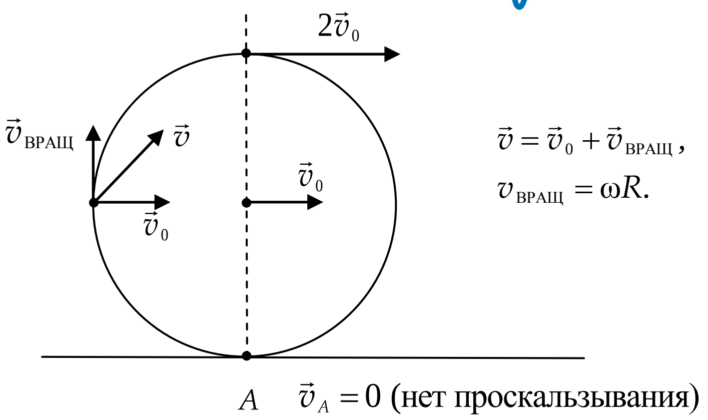
Для равномерного вращения

$$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 4\pi^2 n^2 r,$$

где n - число оборотов в единицу времени.

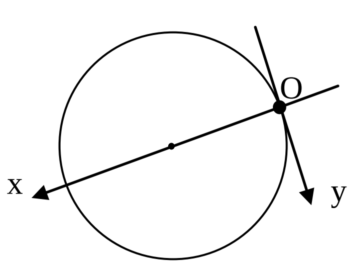
Тангенциальное ускорение определяется скоростью изменения модуля вектора мгновенной скорости $\left(a_\tau = \Delta v / \Delta t\right)$ и может быть сонаправлено с вектором $\vec{v}$ (при увеличении модуля скорости), так и против вектора $\vec{v}$ (при уменьшении модуля скорости). При этом модуль вектора полного ускорения определяется по теореме Пифагора $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

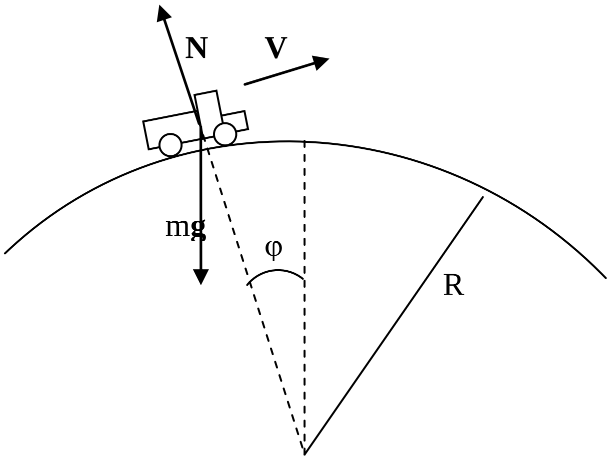
олеса. При качении колеса его точки участвуют одновременно во движении относительно оси колеса со скоростью $\vec{v}_{\text{ВРАЩ}}$ и в поступательном движении вместе с осью колеса со скоростью $\vec{v}_0$. Тогда скорость $\vec{v}$ любой точки колеса может быть представлена так : $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{ВРАЩ}}$ (см.рис.). Если катящееся колесо радиуса R вращается относительно своей оси с угловой скоростью ω, то условие качения колеса без проскальзывания (точка, которой колесо касается поверхности, не двигается относительно поверхности) таково: $v_0 = \omega R$. При качении колеса с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ ускорение точек на ободе колеса равно по модулю $\omega^2 R$ и направлено к центру колеса.



Динамика движения по окружности.

Основным уравнением динамики вращательного движения материальной точки является второй закон Ньютона в векторной форме. Переходя к скалярной форме записи, удобно прейти к проекциям на оси OX и OY выбранные таким образом, что ось OX проходит через материальную точку и центр окружности, причем за положительное направление этой оси принимается направление к центру окружности.





Спутники и планеты.

Закон всемирного тяготения определяет силу гравитационного притяжения между различными телами. В случае тела и планеты эта сила равна $F = GmM/r^2$, где m – масса тела, M – планеты, r – расстояние до центра планеты, $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ Н м^2/кг^2 – постоянная всемирного тяготения (гравитационная постоянная). Ускорение свободного падения на ты радиуса R: $g_0 = F/m = GM/R^2$; с высотой h ускорение свободного закону: $g(h) = GM/(R+h)^2 = g_0R^2/(R+h)^2$. Например, на высоте, равной радиусу Земли $h = R$, ускорение свободного падения оказывается в четыре раза меньше, чем на её поверхности: $g/g_0 = R^2/r^2 = R^2/(R+h)^2 = 4$.

Уравнение движения спутника на круговой орбите радиусом $r = R + h$:

$$GmM/r^2 = mv^2/r.$$

Скорость движения спутника на круговой орбите

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = (g_0R^2/r)^{1/2}.$$

На околоземной орбите, для которой $r \approx R$, спутники движутся со скоростью $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{g_0R} = 7{,}9$ км/с. Эта скорость называется ***первой космической скоростью***.

Период обращения спутника вокруг планеты (или планеты вокруг Солнца) $T = 2\pi r/v = 2\pi r/(GM/r)^{1/2} = 2\pi r^{3/2}/(GM)^{1/2}$. Это означает, что для двух планет Солнечной системы или для двух спутников Земли отношение квадратов периодов равно отношению кубов радиусов орбит: $(T_2/T_1)^2 = (r_2/r_1)^3$ – третий Закон Кеплера для круговых орбит.

Элементы статики.

Состояние механической системы называется *равновесным*, если все точки системы покоятся относительно выбранной системы отсчета.

Для равновесия материальной точки необходимо и достаточно, чтобы сумма действующих на нее сил равнялась нулю

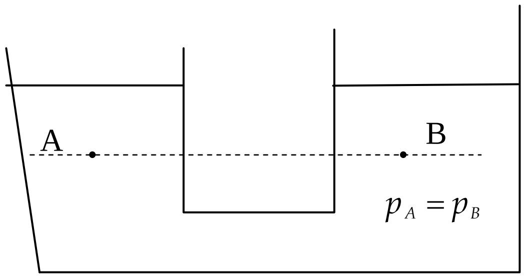
$$\sum \vec{F}_i = 0.$$

Расстояние d от оси вращения до линии действия силы называется плечом силы. Моментом M силы $\vec{F}$ относительно оси называется произведение модуля F силы на плечо d силы: $M = F \cdot d$. Твердое тело находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчета, если 1) равна нулю сумма всех внешних сил, действующих на тело, 2) сумма моментов внешних сил относительно любой оси вызывающих вращение по часовой стрелке, равна сумме моментов внешних сил относительно той же оси вызывающих вращение против часовой стрелки: $\sum M_{+,i} = \sum M_{-,i}$.

Давлением p называется величина, равная отношению модуля силы F, действующей по нормали (перпендикулярно) к плоской поверхности, к площади S этой поверхности: $p = F/S$. Величина давления в данной точке жидкости не зависит от ориентации плоской поверхности.

Закон Паскаля: давление, оказываемое на жидкость (или газ) в каком-либо одном месте на ее границе, передается без изменения во все точки жидкости.

Давление, которое появляется в жидкости из-за поля тяжести, называется гидростатическим. В однородной жидкости с плотностью ρ на глубине h, считая от поверхности, гидростатическое давление p равно $p = \rho g h$, где g - ускорение свободного падения. Полное давление в жидкости складывается из давления на поверхность жидкости (например, атмосферное давление) и гидростатического.



В сообщающихся неподвижных сосудах, заполненных однородной жидкостью, давление во всех точках жидкости, расположенных в одной горизонтальной плоскости, одинаково, независимо от формы сосуда.

На поверхность твердого тела, опущенного в жидкость (газ), действуют силы давления. Эти силы увеличиваются с глубиной погружения. Равнодействующая всех сил давления, действующих на поверхность тела со стороны жидкости, называется *выталкивающей силой* или *силой Архимеда* .

Закон Архимеда: *Выталкивающая сила, действующая на тело, погруженное в жидкость, равна по модулю весу вытесненной жидкости и противоположно ему направлена.*

Приведенная формулировка закона Архимеда справедлива в случае, когда вся поверхность тела соприкасается с жидкостью, или в случае, когда тело плавает в жидкости, а также в случае, если тело частично опущено в жидкость через свободную, т.е. не соприкасающуюся со стенками сосуда, поверхность жидкости.

Если же часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда, так что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим.

Сила Архимеда рассчитывается по формуле

$$F_{\text{АРХ}} = \rho g V,$$

жидкости, V - объём вытесненной жидкости, g - ускорение свободного падения.

Закон сохранения импульса

Система тел определяется указанием тех тел, которые в эту систему входят.

Силы, действующие на тела системы, разделяют на *внешние силы*, действующие со стороны тел, не входящих в систему, и *внутренние силы*, действующие между телами системы. Из третьего закона Ньютона следует, что векторная сумма всех внутренних сил равна нулю.

Система тел называется *замкнутой*, если внешние силы отсутствуют.

Импульсом $\vec{p}$ *тела* (материальной точки) называется произведение массы m на скорость $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульсом $\vec{p}$ *системы,* состоящей из n тел (материальных точек) с массами $m_1, m_2, ..., m_n$, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ называется сумма их импульсов

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ...\ m_n\vec{v}_n.$$

Пусть в некоторый начальный момент времени t_1 импульс тела имеет значение $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, а в последующий момент времени t_2 импульс тела стал равен $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ (масса тела остается постоянной). Тогда *изменение импульса* тела $\Delta\vec{p}$ за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$ составит $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Второй закон Ньютона для тела массой m может быть записан в виде

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\Delta\vec{v} = \vec{F} \cdot \Delta t,$$

где $\vec{F}$ - равнодействующая всех сил, действующих на тело. Произведение силы на время ее действия называется *импульсом силы.* Если равнодействующая сила $\vec{F}$, из приведенного выше уравнения можно найти изменение импульса тела за любой промежуток времени. Если равнодействующая силы изменяется по модулю с течением времени по некоторому закону $F(t)$, импульс такой силы численно равен площади под графиком $F(t)$.

Изменение импульса системы тел равно импульсу равнодействующей внешних сил:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t.$$

Импульс замкнутой системы тел сохраняется (закон сохранения импульса):

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ...\ m_n\vec{v}_n = const.$$

стемы может сохраняться и в том случае, если система не является замкнутой, но равнодействующая внешних сил равна нулю $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$.

Закон сохранения импульса можно применять и тогда, когда сумма внешних сил не равна нулю: 1) если внешние силы перпендикулярны некоторой оси, то проекция импульса на это направление сохраняется; 2) если взаимодействие носит кратковременный характер (удар, взрыв), а внешние силы остаются конечными, то изменением импульса за это время можно пренебречь.

Центр масс системы, состоящей из n тел (материальных точек) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, положение которых задается радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ - это точка, положение которой задается формулой

$$\vec{r}_{\text{ЦМ}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Импульс системы тел равняется произведению массы системы на скорость центра масс $\vec{p} = m\vec{v}_{\text{ЦМ}}$. Если импульс системы сохраняется, то центр масс движется с постоянной скоростью. Движение центра масс определяется только внешними силами

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = m\vec{a}_{\text{ЦМ}}.$$