

Задача №1

Тело, свободно падающее с некоторой высоты, первый участок пути проходит за время $\tau = 1\text{с}$, а такой же последний — за время $\tau/2$. Найдите полное время падения тела t , если его начальная скорость равна нулю.

Решение:

Первый участок $S_1 = g\tau^2 / 2$

Последний участок $S_n = v_n \frac{\tau}{2} + \frac{g}{2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$, v_n - скорость в начале последнего участка

Приравниваем $\frac{g}{2}\tau^2 = v_n \frac{\tau}{2} + \frac{g}{2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$, находим $v_n = 3g\tau/4$.

Время падения при равноускоренном движении от нуля до начала последнего участка $t_n = \frac{3g\tau/4}{g} = \frac{3}{4}\tau$

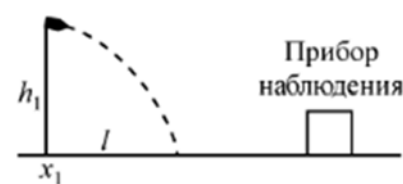
Добавляя время прохождения последнего участка, получаем полное время

$$T = \frac{3}{4}\tau + \frac{\tau}{2} = \frac{5}{4}\tau$$

Ответ: $T = \frac{5}{4}\tau = 1,25\text{ с}$

Задача 2

Прибор наблюдения обнаружил летящий снаряд и зафиксировал его горизонтальную координату x_1 и высоту $h_1=1655$ м над Землёй (см. рисунок). Через $\tau=3$ с снаряд упал на Землю и взорвался на расстоянии $l=1700$ м от места его обнаружения. Известно, что снаряды данного типа вылетают из ствола пушки со скоростью 800 м/с. На каком расстоянии от точки взрыва снаряда находилась пушка, если считать, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало? Пушка и место взрыва находятся на одной горизонтали.



Решение:

Если начало координат поместить в точке выстрела, уравнения движения примут вид

$$x = vt \cos \alpha$$

$$y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Найдем выражение для расстояния от точки выстрела до точки взрыва. Полное время полета равно удвоенному времени подъема до максимальной высоты. Время подъема

$$t_{\text{под}} = \frac{v \sin \alpha}{g}.$$

Искомое изменение координаты x за время $2t_{\text{под}}$

$$\Delta x = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad (0.1)$$

Используем тот факт, что за $\tau=3$ с снаряд пролетел по горизонтали $l=1700$ м, и найдем горизонтальную составляющую скорости

$$l = v\tau \cos \alpha \quad (0.2)$$

Из (0.2) выражаем косинус и подставляем в (0.1):

$$\Delta x = \frac{2v^2}{g} \frac{l}{v\tau} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{v\tau}\right)^2} = 65306 \text{ м} \quad (0.3)$$

Данные по высоте подъема в точке, когда снаряд засеки, оказываются лишними. Но они по крайней мере не противоречивы. Действительно, изменение y -координаты в течение времени τ равно

$$v\tau \sqrt{1 - \left(\frac{l}{v\tau}\right)^2} - \frac{g\tau^2}{2} = 1650 \text{ м, в согласии с данными условия.}$$

Ответ: $x = \frac{2v^2}{g} \frac{l}{v\tau} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{v\tau}\right)^2} = 65,3 \text{ км}$

Задача 3

В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 6 часов. Если во время полета дует боковой ветер со скоростью 20 м/с перпендикулярно линии полета, то самолет затрачивает на перелет на несколько минут больше. Определите, на какое время увеличивается время полета, если скорость самолета относительно воздуха постоянна и равна 328 км/ч.

Решение:

При боковом ветре

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_{\text{собств}} + \mathbf{v}_{\text{ветра}}$$

В проекциях

$$V_x = v_{\text{собств}} \cos \alpha$$

$$V_y = v_{\text{собств}} \sin \alpha - v_{\text{ветра}}$$

Чтобы не было бокового сноса должно быть $V_y = 0$, откуда

$$\sin \alpha = \frac{v_{\text{ветра}}}{v_{\text{собств}}},$$

Тогда х-проекция скорости

$$V_x = v_{\text{собств}} \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\text{ветра}}}{v_{\text{собств}}} \right)^2}$$

Изменение времени полета между городами определяется изменением х-проекции скорости

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\text{собств}}} \left[\left(1 - \left(\frac{v_{\text{ветра}}}{v_{\text{собств}}} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right] = t_0 \left[\left(1 - \left(\frac{v_{\text{ветра}}}{v_{\text{собств}}} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right] = 9 \text{ МИН}$$

Ответ: 9 мин.

Задача 4

Два одинаковых груза массой $M = 100$ г каждый подвешены на концах невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок с неподвижной осью. На один из них кладут перегрузок массой $m = 20$ г, после чего система приходит в движение. Найдите модуль силы F , действующей на ось блока во время движения грузов. Трением пренебечь.

Решение:

Уравнения движения

$$T - Mg = Ma$$

$$(M + m)g - T = (M + m)a$$

Сила, действующая в оси блока, из условия его равновесия

$$F_0 = 2T.$$

Устраняем ускорение и находим силу натяжения T из уравнений движения

$$\begin{cases} \frac{T}{M} - g = a \\ g - \frac{T}{M + m} = a \end{cases} \Rightarrow \frac{2g}{\frac{1}{M} + \frac{1}{M + m}} = T$$

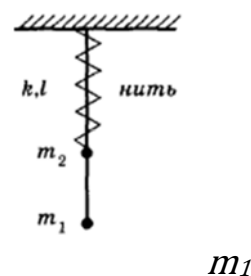
$$\text{Откуда } F_0 = \frac{4g}{\frac{1}{M} + \frac{1}{M + m}} = \frac{4gM(M + m)}{2M + m} = 2,18 \text{ Н.}$$

Без перегрузка, как и следовало ожидать, получили бы $F_0 = 2Mg$.

$$\text{Ответ: } F_0 = \frac{4gM(M + m)}{2M + m} = 2,18 \text{ Н}$$

Задача 5

Материальные точки массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г соединены невесомым стержнем, как показано на рисунке. К точке m_2 прикреплена невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, верхний конец которой закреплен. Длина пружины в недеформированном состоянии $l_0 = 20$ см. В начальный момент концы пружины связаны нитью длиной $l = 10$ см. Определите силу реакции стержня, действующую на массу сразу после пережигания нити.



Решение:

Сила упругости деформированной пружины

$$F_{\text{уп}} = k(l_0 - l) = 3 \text{ Н, направлена вниз, т.к. пружина сжата.}$$

Найдем ускорение системы грузов, скрепленных стержнем, после пережигания:

$$F_{\text{уп}} + (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = g + \frac{k(l_0 - l)}{m_1 + m_2}.$$

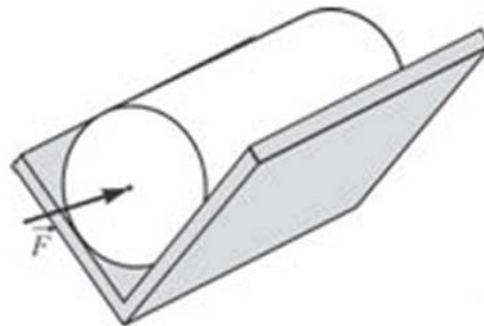
На нижний груз действуют реакция стержня и сила тяжести, а его ускорение равно a :

$$m_1 g + T = m_1 a \Rightarrow T = m_1 (a - g) = m_1 \frac{k(l_0 - l)}{m_1 + m_2} = 1 \text{ Н, направлена вниз.}$$

Ответ: $T = m_1 \frac{k(l_0 - l)}{m_1 + m_2} = 1 \text{ Н}$

Задача 6

Из двух ровных досок сделан желоб, представляющий собой двугранный угол с раствором $2\alpha=90^\circ$. Желоб закреплен так, что его ребро горизонтально, а доски симметричны относительно вертикали. В желобе на боковой поверхности лежит цилиндр массой $m=1\text{ кг}$. Коэффициент трения между досками и цилиндром равен $\mu=0,2$. К торцу цилиндра приложена горизонтально направленная сила $F=3\text{ Н}$. Найдите модуль ускорения цилиндра.



Решение:

Найдем силу реакции опоры на каждой из линий соприкосновения

$$N = mg \cos \alpha = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

Максимальная сила трения на каждой из линий равна $\mu \frac{mg}{\sqrt{2}}$, суммарная максимальная сила трения

$$F_{fr} = 2\mu \frac{mg}{\sqrt{2}} \approx 1,4 \times 0,2 \times 1 \times 10 = 2,8 \text{ Н}$$

Этой силы недостаточно, чтобы обеспечить покой тела, т.к. получается $F_{fr} < F$.

Поэтому тело движется с ускорением

$$a = \frac{F - F_{fr}}{m} = \frac{F - \sqrt{2}\mu mg}{m} = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = \frac{F - \sqrt{2}\mu mg}{m} = 0,2 \text{ м/с}^2.$

Задача 7

На последнем автосалоне в Детройте фирма «Мерседес» представила новый родстер с двигателем объёмом 4,7 литра, способный разогнаться от 0 до 100 км/ч за 4,8 секунды. Считая, что процесс разгона происходит по горизонтали и является равноускоренным, определите, под каким углом к горизонту направлена сила, действующая на водителя со стороны сиденья во время такого разгона.

Решение:

Условие равновесия водителя в кресле

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F},$$

\mathbf{F} - сила, действующая со стороны кресла. Ускорение автомобиля направлено по горизонтали, ускорение свободного падения – по вертикали. Проецируем

$$ma = F \cos \alpha$$

$$0 = F \sin \alpha - mg$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha = g / a$. Ускорение $a = \frac{\left(\frac{100\,000}{3600}\right) \text{ м/с}}{4,8 \text{ с}} = 5,79 \text{ м/с}^2$.

Окончательно $\alpha = \arctan \frac{9,8}{5,79} \approx 60^\circ$. При нулевом ускорении, как и следует ожидать $\alpha = 90^\circ$, т.е. реакция со стороны сиденья направлена вверх.

Ответ: $\alpha = \arctan \frac{g}{a} \approx 60^\circ$

Задача 8

На каком расстоянии от центра Земли силы притяжения космического корабля к Земле и Луне уравниваются друг друга? Масса Луны в 81 раз меньше Массы Земли, а расстояние между их центрами в 60 раз больше радиуса Земли. (R_3 – радиус Земли).

Решение

Условие равенства сил притяжения со стороны Земли и Луны (r - расстояние от корабля до центра Земли)

$$G \frac{M_3 m}{r^2} = G \frac{M_л m}{(60R - r)^2} \quad (0.4)$$

Сокращаем общие множители

$$\frac{81}{r^2} = \frac{1}{(60R - r)^2}, \quad (0.5)$$

Отсюда $r = 54R$.

Ответ: $r = 54R$

Домашнее задание

№1. Маленький шарик падает сверху на наклонную плоскость и упруго отражается от неё. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° . На какое расстояние по горизонтали перемещается шарик между первым и вторым ударами о плоскость? Скорость шарика непосредственно перед первым ударом направлена вертикально вниз и равна 1 м/с .

№2. Тело, свободно падающее с некоторой высоты из состояния покоя, за время $\tau = 1 \text{ с}$ после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения.

№3. На гладкой горизонтальной плоскости находится длинная доска массой $M = 2 \text{ кг}$. По доске скользит шайба массой $m = 0,5 \text{ кг}$. Коэффициент трения между шайбой и доской $\mu = 0,2$. В начальный момент времени скорость шайбы $v_0 = 2 \text{ м/с}$, а доска покоится. Сколько времени потребуется для того, чтобы шайба перестала скользить по доске?



№4. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два груза массами $m_1 = 0,5 \text{ кг}$ и $m_2 = 2 \text{ кг}$, соединённые невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через два неподвижных (А и В) и один подвижный (О) невесомые блоки, как показано на рисунке. Оси блоков горизонтальны, трения в осях блоков нет. К оси О подвижного блока приложена направленная вертикально вниз сила $F = 4 \text{ Н}$. Найдите ускорение этой оси. Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на грузы и блок.

